Leçon 226 : Suites vectorielles et réelles définies par une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$. Exemples. Applications à la résolution approchée d'équations.

RM
2022-2023

Soit (E, d) un espace métrique avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1 Suites récurrentes

1.1 Suites récurrentes d'ordre h et 1

Définition 1 : Soit h un entier naturel non nul. Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans E est dite récurrente d'ordre h si on peut écrire $\forall n \geq h, u_n = f(u_{n-1}, u_{n-2}, ..., u_{n-h})$ où f est une application de E^h dans E.

Remarque 2 : On peut finalement toujours de ramener à une suite récurrente d'ordre 1 en posant $(v_n = \begin{pmatrix} u_{n-1} \\ \vdots \\ u_{n-h} \end{pmatrix})_{n\geq h}$ et $g : \begin{array}{ccc} E^h & \rightarrow & E^h \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_h \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} f(x_1, ..., x_h) \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{h-1} \end{pmatrix} \end{array}$.

On pose alors $v_{n+1} = g(v_n)$ et on est bien ramener à l'ordre 1. Nous allons donc nous concentrer sur les suites récurrentes d'ordre 1.

1.2 Suites récurrentes d'ordre 1 réelles

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite réelle définie par $u_0 \in I$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ avec $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ continue telle que $f(I) \subset I$.

Théorème (critère séquentiel de la continuité) 3 : Soient $I =]a, b[$ et $l \in \mathbb{R}$. Alors la fonction $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est continue au point l si et seulement si quelque soit $(u_n) \in I^{\mathbb{N}}$ convergeant vers l, la suite $f(u_n)$ converge vers $f(l)$.

Corollaire 4 : Si la suite (u_n) d'éléments de I converge vers $l \in I$, alors nécessairement $l = f(l)$, donc l est un point fixe de f.

Exemple 5 : Pour la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = u_n^2 - u_n - 3$, on a $f(x) = x^2 - x - 3$. Comme f est continue, la limite éventuelle de (u_n) vérifie $l = l^2 - l - 3$, ie $l = -1$ ou $l = 3$.

Proposition 6 : *i)* Si f est croissante sur I, alors la suite (u_n) est monotone, dépendant du signe de $u_1 - u_0$.

ii) Si f est décroissante sur I, alors les suites extraites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont monotones de sens de variation opposés.

Exemple 7 : On considère $u_0 \in I = [-\pi/2, \pi/2]$ et $u_{n+1} = \sin(u_n)$. On trouve déjà que le seul point fixe de sin sur I est 0, donc si (u_n) converge, c'est vers 0. Ensuite, comme la fonction sin est croissante sur I, on a que (u_n) décroit si $u_1 \leq u_0$ (donc si $u_0 \in [0, \pi/2]$) et croit si $u_1 \geq u_0$ (donc si $[-\pi/2, 0]$). Comme (u_n) est bornée, on en déduit que (u_n) converge vers 0 pour tout u_0.

1.3 Récurrences linéaires à coefficients constants

Définition 8 : On di qu'une suite (u_n) à valeurs complexes vérifie une récurrence linéaire (homogène) d'ordre h à coefficients constants si $\forall n \geq h, u_n = a_1 u_{n-1} + a_2 u_{n-2} + ... + a_h u_{n-h}$ avec $(a_1, ..., a_h \in \mathbb{C})$.

Proposition 9 : L'équation $x^h - a_1 x^{h-1} - ... - a_h = 0$ s'appelle équation caractéristique de la récurrence. Si on note $r_1, ..., r_q$ ses racines et $\alpha_1, ..., \alpha_q$ leur ordre de multiplicité respectifs, alors l'ensemble des suites (u_n) vérifiant l'équation est l'ensemble des suites de la forme $u_n = P_1(n) r_1^n + ... + P_q(n) r_q^n$, où pour tout i, P_i est un polynôme vérifiant $deg(P_i) < \alpha_i$.

Exemple 10 : Soit $u_0, u_1, a, b \in \mathbb{C}$ et $\forall n \geq 2, u_n = a u_{n-1} + b u_{n-2}$. L'équation caractéristique correspondante est $(E) x^2 - ax - b = 0$. On a alors :

- Si (E) possède deux racines x_1, x_2 alors $u_n = \lambda x_1^n + \mu x_2^n$ avec $u_0 = \lambda + \mu$ et $u_1 = \lambda x_1 + \mu x_2$.
- Si (E) possède une racine double x alors $u_n = (\lambda n + \mu) x^n$.

1.4 Quelques familles de suites classiques

Suites arithmétiques 11 : Ce sont les suites (u_n) à valeurs dans un e.v E vérifiant une relation de récurrence de la forme $u_{n+1} = u_n + a$ où $a \in E$. On a alors $u_n = u_0 + na$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, avec a appelé la raison.

Suites géométriques 12 : Ce sont les suites à valeur dans $\mathbb{K}$ vérifiant une relation de récurrence de la forme $u_{n+1} = q u_n$. On a alors $u_n = q^n u_0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et on dit que q est la raison. Si $|q| > 1$, la suite (u_n) diverge ; si $|q| < 1$, la suite (u_n) converge vers 0 ; si $q = 1$, la suite (u_n) est constante.

Suites arithmético-géométriques 13 : Ce sont les suites à valeurs dans $\mathbb{K}$ vérifiant une relation de récurrence de la forme $u_{n+1} = qu_n + a$. Si $q \neq 1$, on a $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = q^n(u_0 - r) + r$ avec $r = a/1 - q$.

Récurrence homographique 14 : Ce sont les suites à valeurs dans $\mathbb{K}$ de la forme $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = h(u_n)$ avec $h(x) = \frac{ax+b}{cx+d}, ad - bd \neq 0$, ou le dénominateur n'est jamais annulé. On considère alors l'équation $(E) h(x) = x \Leftrightarrow cx^2 - (a-d)x - b = 0$.

- Si (E) admet deux racines distinctes α, β alors on a $\forall n \in \mathbb{N}, \frac{u_n - \alpha}{u_n - \beta} = k^n \frac{u_0 - \alpha}{u_0 - \beta}$ où $k = \frac{a - \alpha c}{a - \beta c}$.
- Si (E) admet une racine double α, alors $\forall n \in \mathbb{N}, \frac{1}{u_n - \alpha} = \frac{1}{u_0 - \alpha} + kn$ où $k = \frac{c}{a - \alpha c}$.

2 Points fixes et suites récurrentes

2.1 Théorème de point fixe

Définition 15 : Soit X,Y deux espaces métriques et $k \in [0, 1[$. On dit que $f : X \to Y$ est k-contractante si $d(f(u), f(v)) \leq kd(u, v)$ pour tout $u, v \in X$. On dit aussi que f est contractante.

Théorème (de picard) 16 : Soit $f : X \to X$ une application k-contractante où X un espace métrique complet. Alors

- f possède un unique point fixe a.
- Pour tout $x_0 \in X$, (x_n) définie par x_0 et $x_{n+1} = f(x_n)$ converge vers a. De plus, on a $d(x_n, a) \leq \frac{k^n}{1-k} d(x_1, x_0)$.

Remarque 17 : Les trois hypothèses du théorème sont essentielles. En effet,

- $f(x) = x/2$ est une 1/2-contraction de $X =]0, 1]$ dans lui même, mais n'a pas de point fixe car X n'est pas complet.
- $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$ est une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que $|f(u) - f(v)| < |u - v|$ si $u \neq v$, mais n'a pas de point fixe dans $\mathbb{R}$ car f n'est pas contractante.
- $f(x) = x/2 + 1$ est 1/2-contractante sur $X = [0, 1]$, mais n'a pas de point fixe dans X car f ne va pas de X dans X.

Corollaire (Picard bis) 18 : Soit (X, d) un espace métrique complet et $f : X \to X$ ayant une itérée f^p contractante. Alors f possède un unique point fixe a et pour tout $x_0 \in X$, la suite (x_n) définie par x_0 et $x_{n+1} = f(x_n)$ converge vers a.

Remarque 19 : Le théorème est faux si l'on suppose seulement $d(f(x), f(y)) < d(x, y)$ pour tout $x \neq y$. Cependant, dans un compact, une telle condition suffit à montrer l'existence et l'unicité d'un point fixe.

2.2 Applications des suites récurrentes en algèbre

Définition 20 : On appelle isobarycentres de $z_1, ..., z_n \in \mathbb{C}^n$ le nombre complexe $\frac{z_1 + ... + z_n}{n}$.

Théorème (Déterminant circulant) 21 : Soient $a_0, ..., a_{n-1}$ des nombres complexes. On pose $\omega = e^{2i\pi/n}$. Alors

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-2} \\ a_{n-2} & a_{n-1} & a_0 & \cdots & a_{n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_0 \end{vmatrix} = \prod_{j=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} a_k \omega^{jk}$$

Théorème 22 : Soit P un polygone du plan complexe dont les sommets sont $\{z_1, ..., z_n\}$. On définit alors par récurrence une suite de polygones $(P_k)_{k \geq 0}$, avec $P_0 = P$, et où les sommets de P_{k+1} sont les milieux des arêtes de P_k.
Alors la suite (P_k) converge vers l'isobarycentre g de P avec $g = \dfrac{z_1 + ... + z_n}{n}$.

Dev 1

2.3 En probabilité

Soit X une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, à valeurs dans $\mathbb{N}$.
Définition 23 : On appelle fonction génératrice de X, notée G_X, la fonction définie pour $s \in \mathbb{R}$ par

$$G_X(s) = \mathbb{E}[s^X] = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = k) s^k$$

lorsque la série converge.

Développement 24 : Soit $(X_{n,i})_{(n,i) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*}$ une famille de variables aléatoires à valeur dans $\mathbb{N}$ indépendantes identiquement distribuées de loi $p_k = \mathbb{P}(X = k)$ pour $k \in \mathbb{N}$ avec $p_0 \in]0, 1[$ et d'espérance m. On définit la suite (Z_n) de la manière suivante

$$Z_0 = 1 \qquad et \qquad \forall n \in \mathbb{N},\ Z_{n+1} = \sum_{i=1}^{Z_n} X_{n,i} \quad (Z_{n+1} = 0 \quad \text{si} \quad Z_n = 0).$$

Enfin on note $\pi_n = \mathbb{P}(Z_n = 0)$ et $P_{ext} = \mathbb{P}(\exists n \in \mathbb{N}, Z_n = 0)$.
Si $m \leq 1$, $P_{ext} = 1$ et le processus s'éteint presque surement.
Si $m > 1$, $P_{ext} < 1$ et il y a une probabilité de survie non nul.

Dev 2

Remarque 25 : Ici Z_n modélise le nombre d'individus à la génération n et $X_{n,i}$ le nombre de descendant de l'individu i à la n-ième génération, π_n la probabilité d'extinction à la génération n et P_{ext} la probabilité d'extinction de la population.
On étudie alors la descendance d'un seul individu et donc on pose $Z_0 = 1$.
Le développement nous dit alors que si la moyenne de descendant pour chaque individus est inférieur ou égale à 1, alors la lignée va s'éteindre presque surement, et si la moyenne est plus grande que 1, alors il y a une probabilité non nul que la lignée survive.

3 Méthodes de résolution d'équation

3.1 Méthode de Newton

Proposition 26 : Soit $f : [c,d] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$, ne s'annulant qu'une fois sur $[c,d]$. On pose alors la suite récurrente suivante : $x_0 \in [c,d]$ et $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.
Alors en notant a l'unique zéro de f, on a :

• Il existe $\alpha > 0$ tel que si $x_0 \in [a-\alpha, a+\alpha]$, alors la suite (x_n) converge de manière quadratique vers a : il existe $C > 0$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|x_{n+1} - a| \leq C|x_n - a|^2$.

• Si de plus f est strictement convexe avec $f'(a) > 0$, alors pour $x_0 \in]a,d]$, la suite (x_n) est strictement décroissante et converge vers le point a.

Remarque 27 : On peut même utiliser la méthode de Newton pour trouver des minimum. Si $g : [c,d] \to \mathbb{R}$ est strictement convexe et de classe $\mathcal{C}^3$, alors on peut trouver son minimum en appliquant la méthode de Newton à la fonction $f = g'$.

Exemple 28 : On fixe $y > 0$ et on prends $f(x) = x^2 - y$. Alors la méthode de Newton nous permet d'approcher $\sqrt{y}$.

3.2 Méthode itérative pour résoudre $AX = B$

On cherches ici des méthodes itératives pour résoudre $Au = b$, où A est inversible et b un vecteur.

Définition (Méthode itérative) 29 : Supposons qu'on puisse trouvé une matrice B et un vecteur c tels que $I - B$ soit inversible, et que les solutions de $u = Bu + c$ soit également solutions du problème de départ. On se donne alors u_0 un vecteur initial, et on pose $(u_k)_{k\geq 0}$ tel que

$$u_{k+1} = Bu_k + c$$

On dit alors que la méthode itérative est convergente si (u_k) converge pour tout u_0 vers u, qui est solution de $Au = b$. La matrice B est appelée matrice de la méthode itérative.

Proposition 30 : Les propositions suivantes sont équivalentes :
1) la méthode itérative est convergente.
2) $\rho(B) < 1$.
3) $\|B\| < 1$ pour au moins une norme matricielle $\|.\|$.

Application 31 : Supposons que l'on peut décomposer A sous la forme $A = M - N$ où M est une matrice inversible et "facile à inverser" de tels sorte qu'il est facile de résoudre $Mu = b$ (diagonale ou triangulaire). Alors

$$Au = b \Leftrightarrow u = M^{-1}Nu + M^{-1}b.$$

Avec $B = M^{-1}N = I - M^{-1}A$, on a alors que $I - B = M^{-1}A$ est inversible et en utilisant la méthode itérative avec donc $u_{k+1} = M^{-1}Nu_k + M^{-1}b$, cela revient à résoudre les systèmes linéaires successifs :

$$Mu_{k+1} = Nu_k + b, k \geq 0$$

Remarque 32 : Cette méthode est la composantes principale des méthodes de Jacobi, Gauss-Seidel et méthode itérative de relaxation, 3 variantes pour résoudre le problème de départ $Au = b$.

Remarque 33 : Les trois méthodes ont une complexité en $O(n^2)$.

Proposition 34 : En décomposant la matrice A de la forme $A = D - E - F$ (voir ciarlet, trop relou de faire la matrice) on peut résumer les méthodes dans le tableau suivant (voir à la fin)

Références :

1. Analyse Gourdon
2. Analyse numérique matricielle Ciarlet
3. Topologie Queffelec
4. Suite et séries ... El Amrani
5. isenmann (rip)

Nom de la Méthode	Décomposition A=M-N	Matrice $M^{-1}N$ de la méthode itérative	Description d'une itération
Jacobi	$A = D - (E+F)$	$J = D^{-1}(E+F) = I - D^{-1}A$	$Du_{k+1} = (E+F)u_k + b$
Gauss-Seidel	$A = (D-E) - F$	$\mathcal{L}_1 = (D-E)^{-1}F$	$(D-E)u_{k+1} = Fu_k + b$
Relaxation	$A = \left(\frac{D}{\omega} - E\right) - \left(\frac{1-\omega}{\omega}D + F\right), \omega \neq 0$	$\mathcal{L}_\omega = \left(\frac{D}{\omega} - E\right)^{-1}\left(\frac{1-\omega}{\omega}D + F\right)$	$\left(\frac{D}{\omega} - E\right)u_{k+1} = \left(\frac{1-\omega}{\omega}D + F\right)u_k + b$